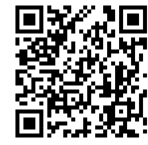
МЕХАНИКА
MECHANICS



УДК 539.3 https://doi.org/10.23947/2687-1653-2020-20-4-370-381

Бесконечная пластина, нагруженная нормальной силой, движущейся по сложной траектории



А. В. Галабурдин
ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет» (г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

Введение. Рассматривается метод решения задачи о бесконечной пластине, лежащей на упругом основании и периодически нагруженной силой, которая перемещается по произвольной замкнутой траектории и произвольному закону.
Материалы и методы. Рассмотрен оригинальный метод решения задач теории упругости для пластин, нагруженных силой, движущейся произвольно по замкнутой траектории произвольной формы. Исследуется задача о бесконечной пластине, лежащей на упругом основании. Пластина нагружена нормальной силой, движущейся с переменной скоростью. Нагрузка раскладывается в ряд Фурье на временном отрезке, длина которого равна времени ее прохождения по траектории. Решение указанной задачи реализуется посредством суперпозиции решений задач, соответствующих нагрузке, задаваемой слагаемыми указанного ряда Фурье. Окончательное решение задачи представляется в виде отрезка ряда Фурье, каждое слагаемое которого соответствует решению задачи о действии на бесконечную пластину нагрузки, распределенной по замкнутой траектории движения силы. Для построения этих решений используется фундаментальное решение уравнения колебания бесконечной пластины, лежащей на упругом основании.
Результаты исследования. Представлено решение задачи о бесконечной плоскости, по которой с переменной скоростью движется сосредоточенная сила. В качестве траектории рассматривалась гладкая замкнутая кривая, состоящая из дуг окружностей. Исследуется характер поведения перемещений и напряжений вблизи движущейся силы, а также изучается процесс распространения энергии упругих волн. Для этой цели рассматривается изменение вектора Умова-Пойтинга.
Обсуждение и заключения. Полученные результаты могут быть использованы в расчетах при проектировании дорог. Исследование распространения энергии упругих волн от движущихся транспортных средств позволит оценить воздействие указанных волн на расположенные вблизи дороги строения. Анализ характера изменения перемещений и напряжений вблизи движущейся силы позволит оценить износ дорожного покрытия.

Ключевые слова: бесконечная пластина, движущаяся нагрузка, произвольная замкнутая траектория, переменная скорость, энергия упругих волн.

Для цитирования: Галабурдин, А. В. Бесконечная пластина, нагруженная нормальной силой, движущейся по сложной траектории / А. В. Галабурдин // Advanced Engineering Research. — 2020. — Т. 20, № 4. — С. 370–381. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2020-20-4-370-381

Infinite plate loaded with normal force moving along a complex path

A. V. Galaburdin
Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

Introduction. A technique of solving the problem on an infinite plate lying on an elastic base and periodically loaded with a force that moves along an arbitrary closed trajectory and according to an arbitrary law, is considered.
Materials and Methods. An original method for solving problems on the elasticity theory for plates loaded with a force moving arbitrarily along a closed trajectory of arbitrary shape is considered. The problem on an infinite plate lying on an elastic foundation is investigated. The plate is loaded with a normal force moving at a variable speed. The load is decomposed into a Fourier series on a time interval whose length is equal to the time of its passage along the trajectory.

The solution to this problem is realized through a superposition of solutions to the problems corresponding to the load defined by the summands of the specified Fourier series. The final problem solution is presented in the form of a segment of the Fourier series, each summand of which corresponds to the solution to the problem on the action on an infinite plate of the load distributed along a closed trajectory of the force motion. The fundamental solution to the vibration equation of an infinite plate lying on an elastic foundation is used to construct these solutions.
Results. A solution to the problem of an infinite plane, along which a concentrated force moves at a variable speed, is presented. A smooth closed curve consisting of arcs of circles was considered as a trajectory. The behavior of displacements and stresses near the moving force is investigated; and the process of the elastic wave energy propagation is also studied. For this purpose, a change in the Umov-Poynting vector is considered.
Discussion and Conclusions. The results obtained can be used in calculations for road design. The study of the propagation of the energy of elastic waves from moving vehicles will provide the assessment of the impact of these waves on buildings located near the road. Analysis of the behavior of displacements and stresses near the moving force will allow assessing the wear of the road surface.

Keywords: infinite plate, moving load, arbitrary closed trajectory, variable speed, elastic wave energy.

For citation: A. V. Galaburdin. Infinite plate loaded with normal force moving along a complex path. Advanced Engineering Research, 2020, vol. 20, no. 4, pp. 370–381. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2020-20-4-370-381

Введение. Во многих областях науки и техники возникают задачи, связанные с распространением упругих волн. Целью данного исследования является изучение закономерностей распространения упругих волн, возникающих под действием подвижной нагрузки. Проблемы подобного рода ранее исследовались различными авторами в ряде работ, где рассматривались разнообразные постановки задач с подвижной нагрузкой и предлагались различные методы их решения.

Часто при решении подобных задач для того, чтобы исключить время из числа независимых переменных, вводится подвижная система координат [1–5] или рассматривается квазистатическая постановка задачи [6–12]. В ряде работ используется метод конечных элементов [11–13]. Интересные результаты позволяет получить использование вариационных [14–16] или прямых методов [17–19]. Методы, основанные на применении фундаментальных решений соответствующих дифференциальных уравнений, использовались в работах [20–22] при решении задач теории упругости о силе, движущейся с постоянной скоростью.

Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее колебание бесконечной пластины, лежащей на упругом основании под действием вертикальной силы P:

$$\Delta^2 U + c^{-2}\partial_t^2 U + kU = \frac{P}{D}, \qquad (1)$$

где U — прогиб пластины; $D = \dfrac{Ed^3}{12(1-\mu^2)}$; E — модуль Юнга; μ — коэффициент Пуассона; d — толщина пластины; $c^{-2} = \dfrac{\rho d}{D}$; ρ — плотность материала пластины; $k = \dfrac{K}{D}$; K — коэффициент жесткости упругого основания.

Будем рассматривать решение, для которого поток энергии направлен от источников возбуждения упругих волн в бесконечность и считаем, что сила P перемещается по замкнутой траектории γ произвольным образом. Кроме того будем полагать, что $P = P(s(t))$, где s — дуговая координата, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки кривой γ. Очевидно, что $P = P(s(t))$ будет функцией периодической по t с периодом T, если $s(t)$ также будет функцией периодической по t с периодом T.

Материалы и методы. Рассмотрим фундаментальное решение уравнения (1). Его можно получить из выражения:

$$\Delta^2 W + c^{-2}\partial_t^2 W + kW = \frac{1}{D}\delta(x-x_o)\delta(y-y_o)\delta_T(t-\tau), \qquad (2)$$

где $\delta_T(t-\tau) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau-nT)$.

Решение уравнения (2) можно получить традиционными методами, применяя принцип предельного поглощения, и представить в виде ряда:

$$W(x, x_0, y, y_0, t-\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k(x, x_0, y, y_0, \omega_k)e^{-i\omega_k(t-\tau)}, \qquad (3)$$

где $w_k(x, x_0, y, y_0, \omega_k)$ удовлетворяет уравнению:

$$\Delta^2 w_k - c^{-2}\omega_k^2 w_k + k w_k = \frac{1}{D}\delta(x-x_o)\delta(y-y_o)e^{i\omega_k \tau}.$$

Известно, что решение уравнения (1) можно представить в виде:

$$U(x,y,t) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\iint_{R^2} W(x,x_o,y,y_o,t-\tau)P(x_o,y_o,\tau)dx_o dy_o d\tau.$$

Если подвижная сила представляет собой единичную сосредоточенную силу, которая описывается функцией:

$$P(s(t)) = \delta(x-x_1(s(t)))\delta(y-y_1(s(t))),$$

то решение в этом случае будет иметь вид:

$$U(x,y,t) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} W(x,x_1(s(\tau)),y,y_1(s(\tau)),t-\tau)d\tau. \quad (4)$$

Определив $U(x,y,t)$, можно вычислить перемещения и напряжения в любой точке пластины.

Если выражение $\omega_k = \frac{2k\pi}{T}$ достаточно велико, то приходиться вычислять интегралы от быстро осциллирующих функций (3). Для этого использовалась квадратурная формула [23, 24]:

$$\int_a^b e^{i\omega x} f(x)dx \approx \int_a^b e^{i\omega x} S(x)dx \approx -\frac{1}{\omega^4}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{e^{i\omega x_{j+1}} - e^{i\omega x_j}}{h_j}\left(M_{j+1} - M_j\right),$$

где h_j — длины элементарных отрезков, на которые разбивается интервал [a; b]; $S(x)$ — аппроксимация $f(x)$ кубическим сплайном $M_j = S''(x_j)$.

Результаты исследования. Расчеты проводились для бесконечной пластины, нагруженной нормальной силой, которая двигалась по замкнутой кривой (рис. 1).

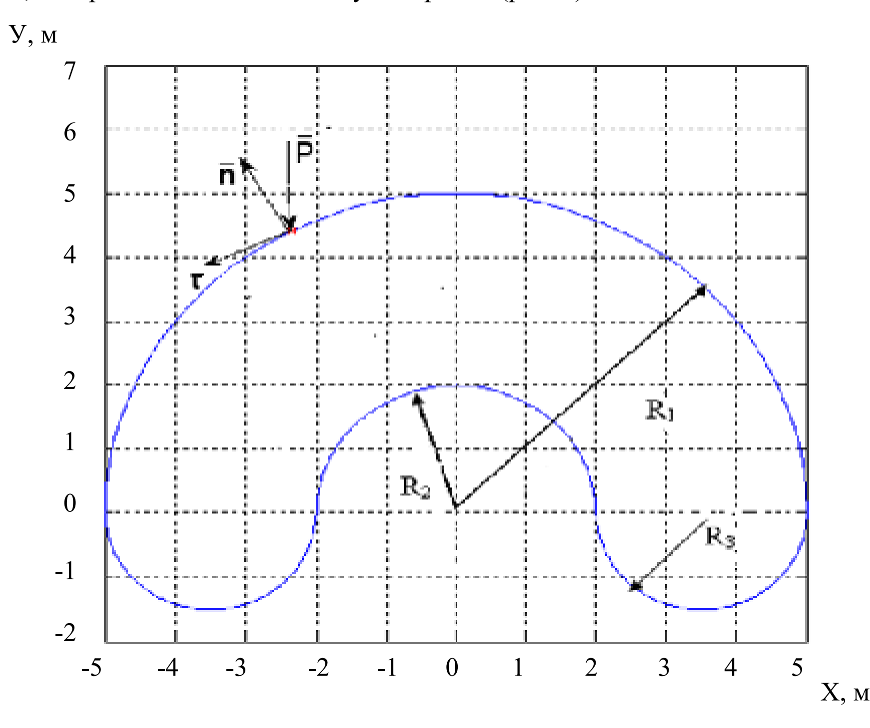


Рис. 1. Траектория движения сосредоточенной силы

При проведении вычислений полагалось, что толщина пластины $d = 0{,}25$ м, параметр $c = 221$ м/с, модуль Юнга материала пластины $E = 232469$ Н/м², коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}36$, коэффициент податливости упругого основания K=1,864 м$^{-4}$. Радиусы, определяющие форму траектории движения силы, принимались равными: $R_1 = 5$ м, $R_2 = 3$ м, $R_3 = 1$ м. В формуле (3) удерживалось 120 членов ряда Фурье, а при вычислении интеграла (4) интервал интегрирования разбивался на 120 равных подинтервалов.

Закон движения силы по траектории описывался функцией:

$$s(t) = \frac{L\cdot\sin(\alpha(t - T/2))}{2\sin(\alpha T/2)} + \frac{L}{2}, \text{ где } \alpha = \frac{\pi}{T},\ t\in[0:T].$$

Рассматривался момент времени $t = \frac{T}{2}$, в который движущаяся сила находилась в одной и той же точке траектории при любом T. При изменении параметра T меняется скоростной режим передвижения сосредоточенной силы по траектории.

Для анализа напряженно-деформированного состояния пластины вычислялись перемещения и напряжения в прямоугольной системе координат, связанной с движущейся сосредоточенной силой. При этом ось τ данной системы направлялась по касательной к траектории $\bar{\tau}$, а ось n совпадала по направлению с внешней нормалью к области, ограниченной траекторией $\bar{n}$ (рис. 1).

В данной системе координат вектор перемещений и тензор напряжений могут быть представлены в виде:

$$\bar{U} = Ut \cdot \bar{\tau} + Un \cdot \bar{n} + W \cdot \bar{k} \,,$$

$$\bar{\bar{S}} = St \cdot \bar{\tau}\bar{\tau} + Sn \cdot \bar{n}\bar{n} + Stn \cdot \left(\bar{\tau}\bar{n} + \bar{n}\bar{\tau}\right),$$

где $\bar{k}$ — нормаль к пластине.

На рис. 2 представлено изменение по оси τ компонент вектора перемещений Wt, Utt, Unt, тензора напряжений $Stt, Snt, Stnt$ (второй и третий графики) и изменение тех же величин вдоль оси n — Wn, Utn, Unn и $Stn, Snn, Stnn$ (первый и четвертый графики) при $z = h/2$, скорости движения силы v = 49,3480 м/с, ускорении движения по траектории w_t = 0 м/с^2 и нормальном ускорении $w_n = v^2/R_1 = 487{,}045$ м/с^2 (положение силы на траектории отмечено красной точкой на рис. 1).

Из представленных графиков видно, что значения перемещений Wn и Wt значительно превосходят значения перемещений в плоскости пластины. То же можно сказать и о нормальных напряжениях, по сравнению с касательными.

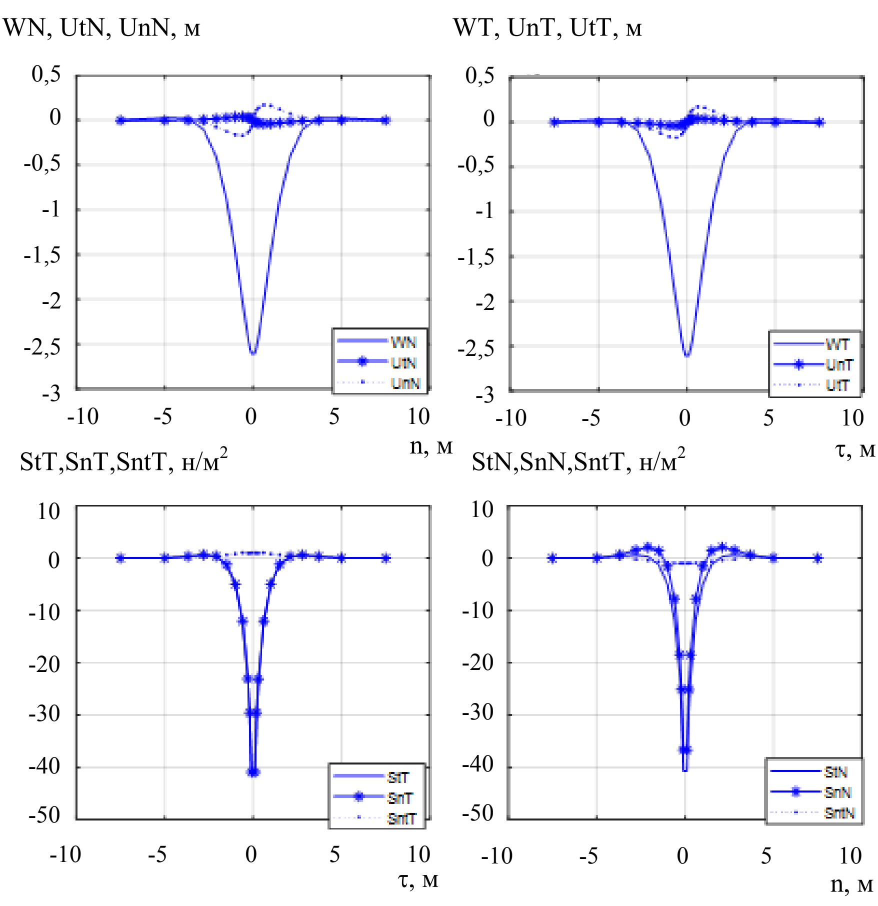


Рис. 2. Изменение перемещений и напряжений (v = 49,3480 м/с)

При исследовании распространения энергии упругих волн вычислялся вектор плотности потока энергии:

$$\dot{P} = -(s_{11}\dot{u}_1 + s_{12}\dot{u}_2)\bar{i} - (s_{12}\dot{u}_1 + s_{22}\dot{u}_2)\bar{j} \,,$$

где s_{ij} — компоненты тензора напряжений; $\dot{u}_i$ — производная по времени координат вектора перемещений.

На рис. 3 представлено распространение энергии упругих волн вблизи сосредоточенной силы, положение которой на траектории обозначено красной точкой. Длина изображенного вектора соответствует количеству энергии, проходящей через данную точку пространства в единицу времени, а направление вектора указывает направление переноса энергии.

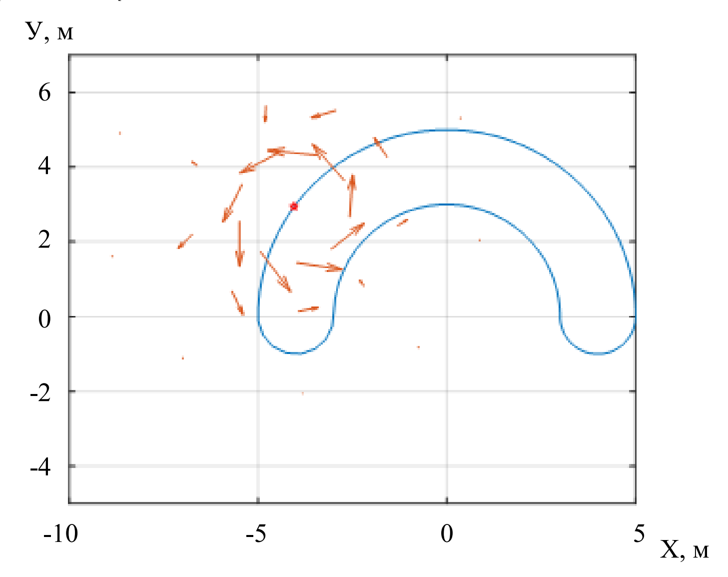


Рис. 3. Вектор плотности потока энергии (v = 49,3480 м/с)

Расчеты показали, что при увеличении скорости движения силы характер изменения перемещений и напряжений, а также характер распространения энергии упругих волн несколько изменяется. На рис. 4, 5 представлены результаты расчетов для скорости v = 246,7401 м/с, которая превосходит скорость распространения упругих волн в пластине — c = 221 м/с. Влияние скорости движения сосредоточенной силы на характер распределения вертикальных перемещений *W* представлено на рис. 6, 7.

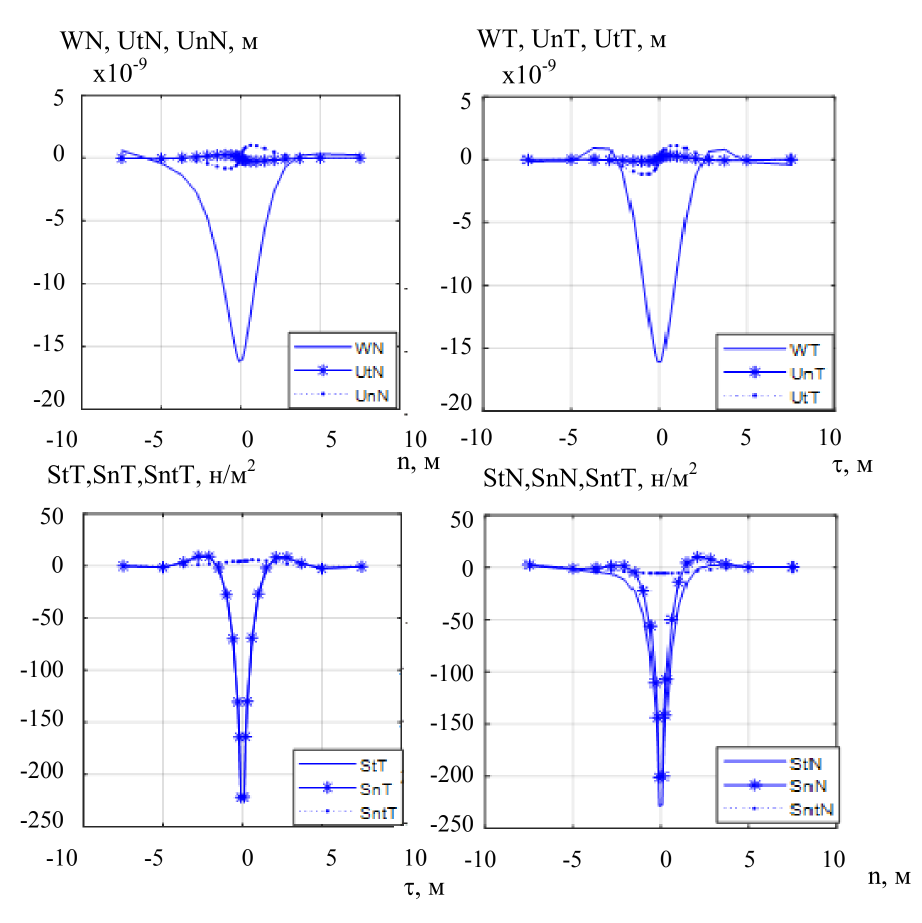


Рис. 4. Изменение перемещений и напряжений (v = 246,7401 м/с)

Рис. 5. Вектор плотности потока энергии (v = 246,7401 м/с)

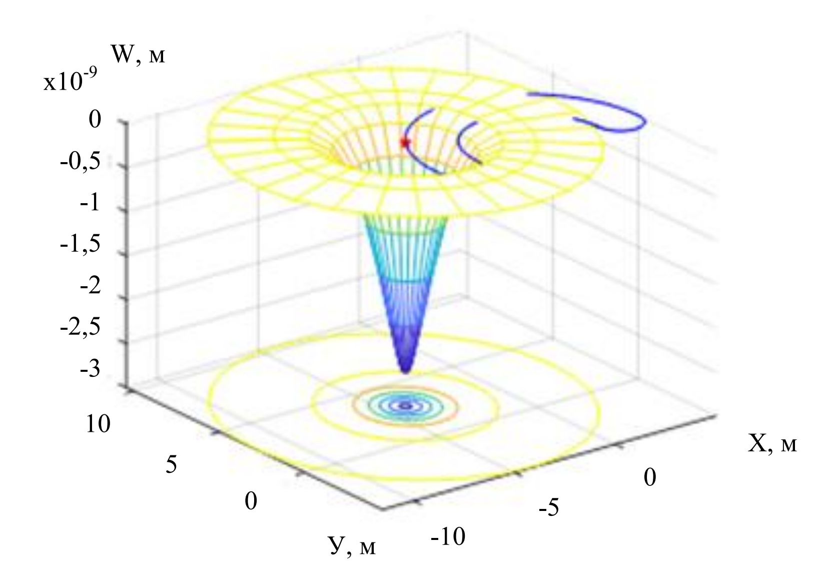


Рис. 6. Изменение вертикальных перемещений при скорости v = 49,3480 м/с

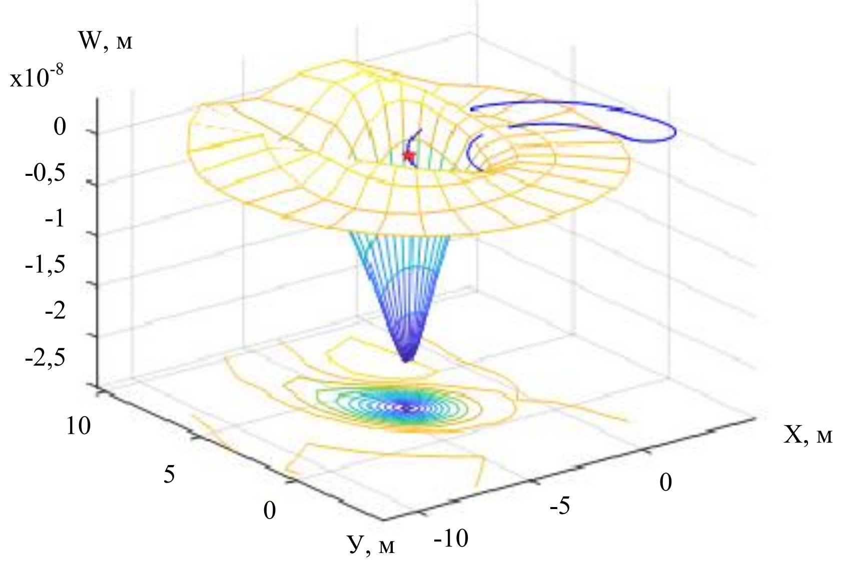


Рис. 7. Изменение вертикальных перемещений при скорости v = 493,480 м/с

На рис. 8, 9 представлены графики изменения максимальных значений перемещений и напряжений в зависимости от скорости движения сосредоточенной силы. Положение силы на траектории в рассматриваемый момент времени отмечено точкой на рис. 3 и 5.

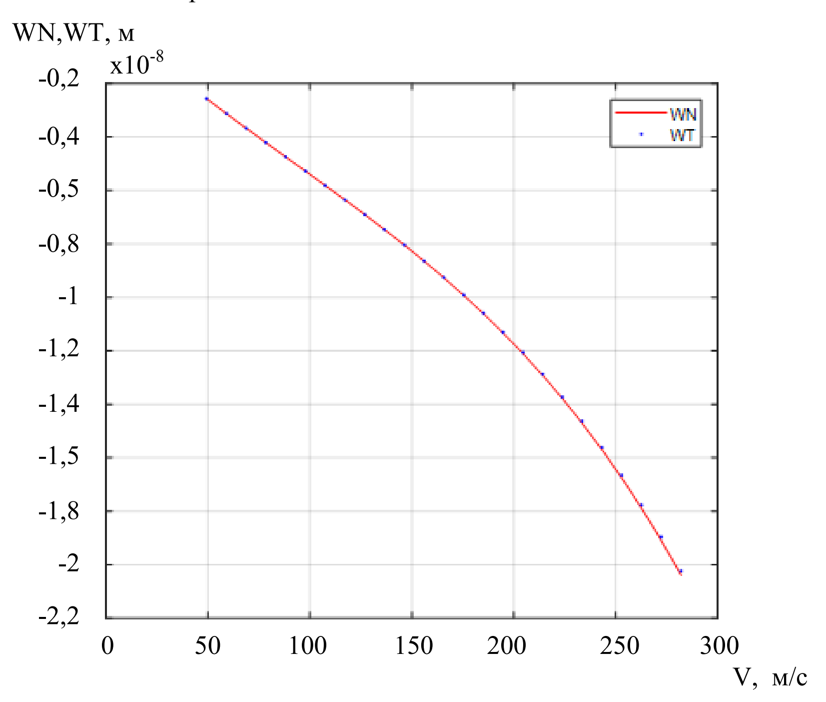


Рис. 8. Изменение максимальных перемещений в зависимости от скорости движения сосредоточенной силы

StT,SnT,StN,SnN, н/м^2

StT
SnT
StN
SnN

0
-50
-100
-150
-200
-250
-300

0 50 100 150 200 250 300
V, м/с

Рис. 9. Изменение максимальных напряжений в зависимости от скорости движения сосредоточенной силы

На рис. 10 представлено распространение энергии упругих волн около движущейся сосредоточенной силы. Касательное ускорение движущейся силы в этот момент равнялось w_t = 1,5503 м/с^2. Расчеты проведены для момента времени $t = T$ при том же, что и в предыдущем случае, законе движения силы вдоль траектории, следовательно при том же законе изменения скорости и ускорения движения силы. В этот момент времени сила находилась в точке траектории, указанной на рис. 10, а ее скорость равнялась нулю. На рис. 11 изображено изменение по оси t компонент вектора перемещений Wt, Utt, Unt и тензора напряжений $Stt, Snt, Stnt$.

Увеличение ускорения движения силы также приводило к изменению перемещений и напряжений и влияло на характер распространения энергии упругих волн. На рис. 12, 13 представлены результаты расчетов для случая w_t = –155,0314 м/с^2.

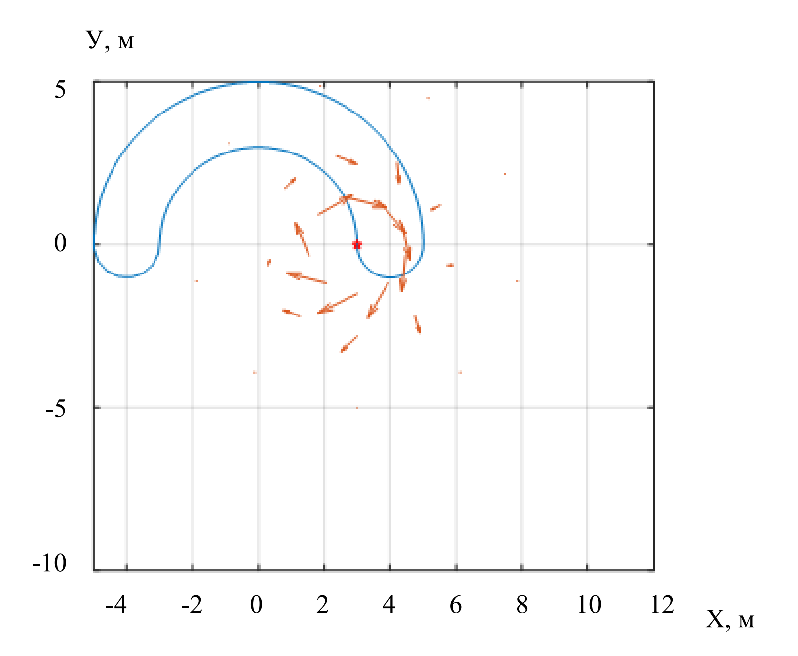


Рис. 10. Вектор плотности потока энергии (w_t = 1,5503 м/с^2)

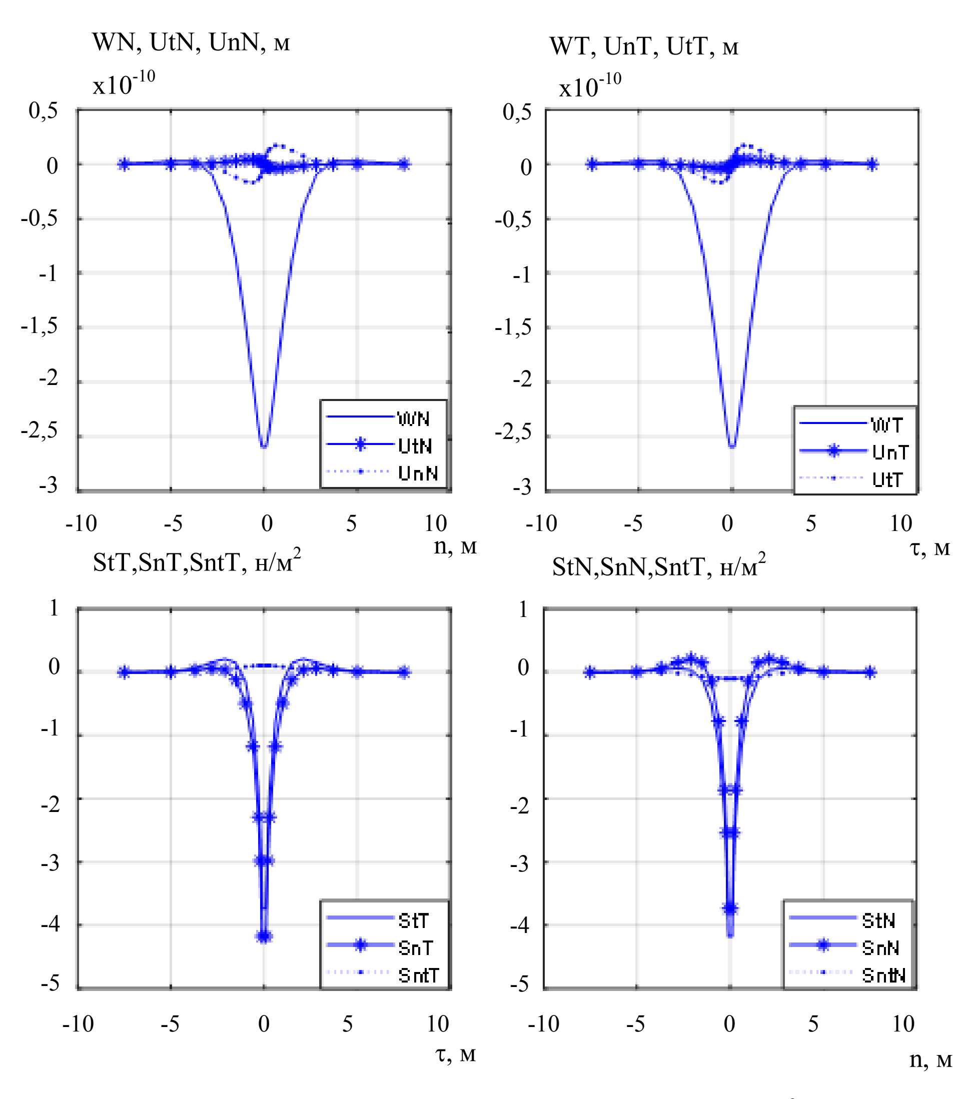


Рис. 11. Изменение перемещений и напряжений (w_t =1,5503 м/с^2)

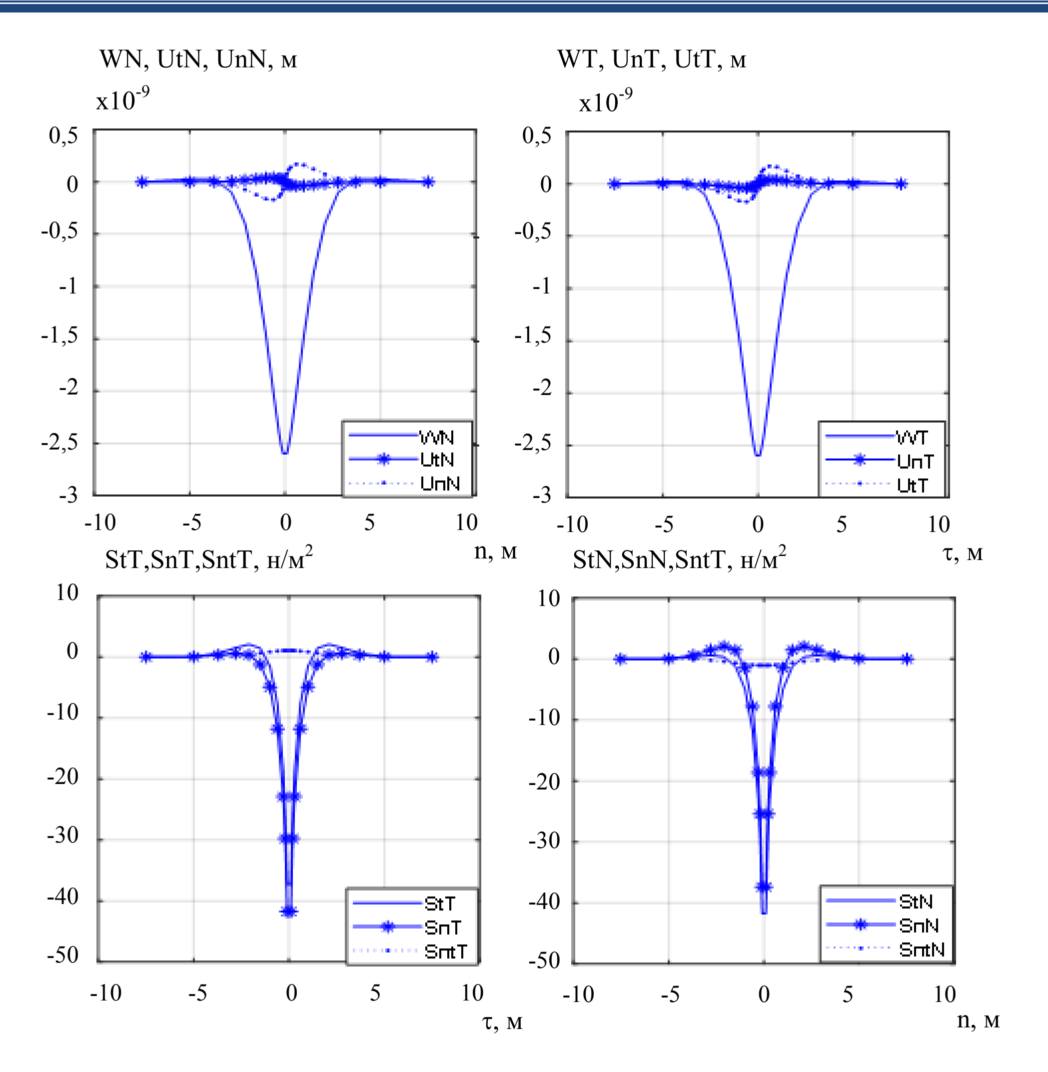


Рис. 12. Изменение перемещений и напряжений (w_t = 155,0314 м/с^2)

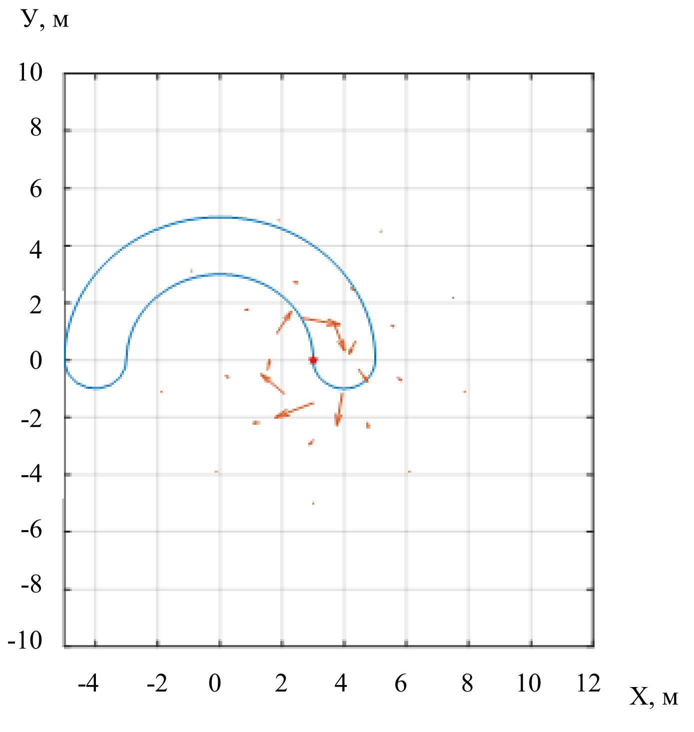


Рис. 13. Вектор плотности потока энергии (w_t = 155,0314 м/с^2)

На рис. 14, 15 представлены графики изменения максимальных значений перемещений и напряжений в зависимости от касательного ускорения движения сосредоточенной силы.

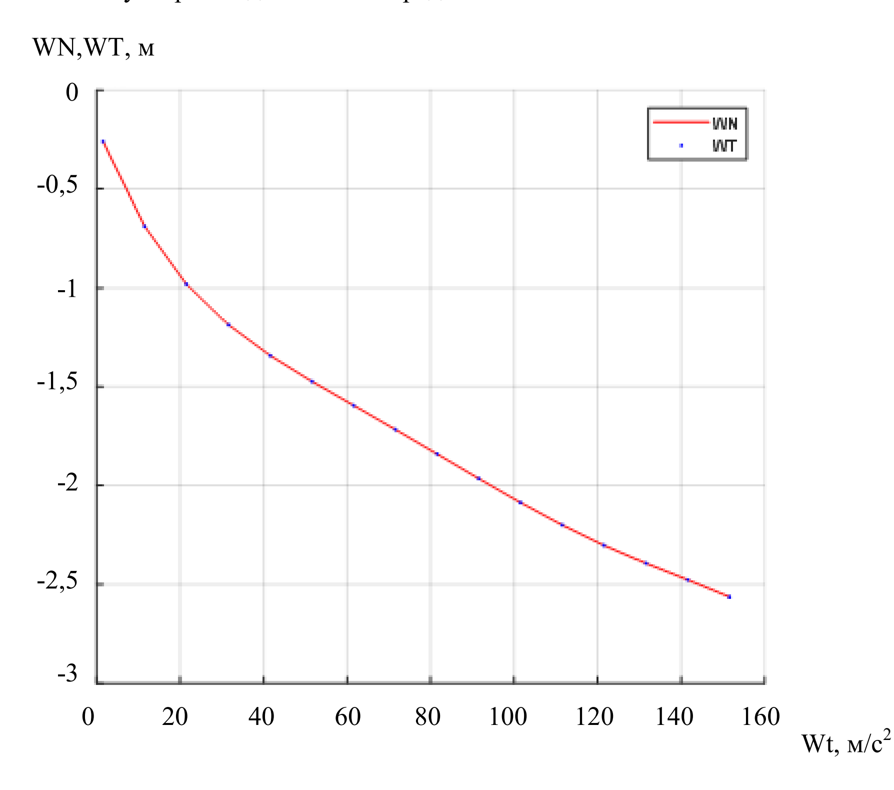


Рис. 14. Изменение максимальных значений перемещений в зависимости от касательного ускорения

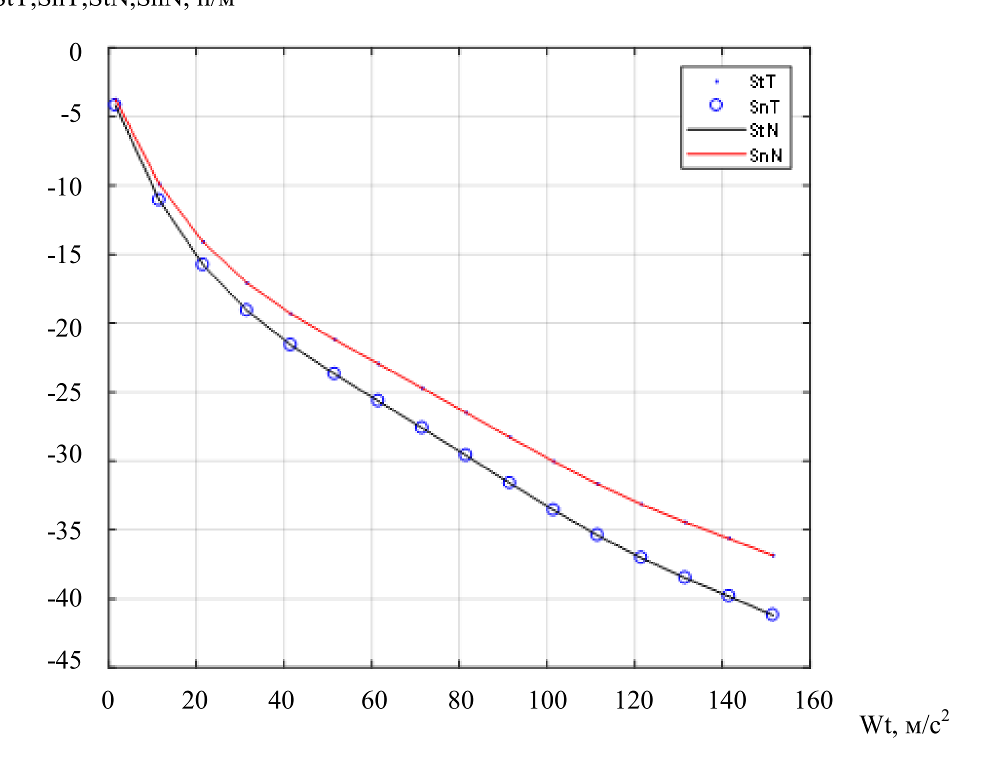


Рис. 15. Изменение максимальных значений напряжений в зависимости от касательного ускорения

Обсуждение и заключения. Имеет место выраженная зависимость полей перемещений и напряжений от скорости и ускорения движения силы при рассмотренных выше пределах изменения этих параметров. Заметно зависит от скорости и ускорения также и характер распространения энергии упругих волн.

Были специально рассмотрены достаточно большие значения скорости и ускорения движения силы для того, чтобы проверить предложенный метод в подобных условиях. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что метод достаточно устойчив в широких диапазонах варьируемых параметров.

Применение предложенного метода вполне допустимо при решении и более сложных задач. Для этого необходимо, чтобы описывающие их дифференциальные уравнения допускали аналитическое построение фундаментального решения. Данный метод отличается экономичностью и простотой, так как использует для построения решения уже известные решения задач.

Библиографический список

1. Александров, В. М. Движение с постоянной скоростью жесткого штампа по границе вязкоупругой полуплоскости / В. М. Александров, А. В. Марк // Трение и износ. — 2006. — Т. 27, № 1. — С. 5–11.

2. Sahin, O. Response of a 3D elastic half-space to a distributed moving load / O. Sahin, N. Ege, B. Erbas // Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. — 2017. — Vol. 46 (5). — P. 817–828. DOI: 10.15672/HJMS.2017.434

3. Kaplunov, J. On a 3D moving load problem for an elastic half space / J. Kaplunov, D. Prikazchikov, B. Erbas [et al.] // Wave Motion. — 2013. — Vol. 50 (8). — P. 1229–1238. DOI:10.1016/j.wavemoti.2012.12.008

4. Динамика слоистого полупространства под действием движущейся и осциллирующей нагрузки / В. В. Калинчук, Т. И. Белянкова, Г. Шмид, А. Тосецки // Вестник Южного научного центра РАН. — 2005. — Т. 1, № 1. — С. 3–11.

5. Приказчиков, Д. А. Околорезонансные режимы в стационарной задаче о подвижной нагрузке в случае трансверсально изотропной упругой полуплоскости / Д. А. Приказчиков // Известия Саратовского университета. — 2015. — Т. 15. — С. 215–221.

6. Chen, Y. Dynamic response of an elastic plate on a cross-anisotropic poroelastic halfplane to a load moving on its surface / Y. Chen, N. D. Beskou, J. Qian // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. — 2018. — Vol. 107. — P. 292–302.

7. Beskou, N. D. Dynamic response of an elastic plate on a cross-anisotropic elastic half-plane to a load moving on its surface / N. D. Beskou, Y. Chen, J. Qian // Transportation Geotechnics. — 2018. — Vol. 14. — P. 98–106.

8. Облакова, Т. В. О резонансном режиме в нестационарной задаче о подвижной нагрузке для упругого полупространства / Т. В. Облакова, Д. А. Приказчиков // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2013. — Т. 9. — С. 1–8.

9. Kaplunov, J. The edge wave on an elastically supported Kirchhoff plate / J. Kaplunov, D. Prikazchikov, G. A. Rogerson // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2014. — Vol. 136 (4). — P. 1487–1490. DOI: 10.1121/1.4894795

10. Глухов, Ю. П. Динамическая задача для двухслойной полосы на жестком основании / Ю. П. Глухов // Труды Одесского политехнического университета. — 2014. — Вып. 2. — С. 9–14.

11. Егорычев, О. О. Воздействие подвижной нагрузки на многослойную вязкоупругую пластину, лежащую на вязкоупругом основании / О. О. Егорычев // Вестник Московского государственного строительного университета. — 2007. — Вып. 1. — С. 39–42.

12. Динамическое поведение безграничной упругой пластинки при воздействии подвижной (бегущей) нагрузки / М. Ж. Досжанов, Е. Н. Искак, Б. Ж. Сактаганов [и др.] // Путь науки. — 2016. — Т. 1, № 11 (33). — С. 26–28.

13. Шишмарев, К. А. Постановка задачи о вязкоупругих колебаниях ледовой пластины в канале в результате движения нагрузки / К. А. Шишмарев // Известия Алтайского государственного университета. — 2015. — № 1/2 (85). — С. 189–194. DOI 10.14258/izvasu(2015) 1.2-35

14. Dyniewicz, B. Vibrations of a Mindlin plate subjected to a pair of inertial loads moving in opposite directions / B. Dyniewicz, D. Pisarski, C. I. Bajer // Journal of Sound and Vibration. — 2017. — Vol. 386. — P. 265–282.

15. Esen, I. A new finite element for transverse vibration of rectangular thin plates under a moving mass / I. Esen // Finite Elements in Analysis and Design. — 2013. — Vol. 66. — P. 26–35.

16. Song, Q. Vibration analysis of functionally graded plate with a moving mass/ Q. Song, J. Shi, Z. Liu // Applied Mathematical Modelling. — 2017. — Vol. 46. — P. 141–160.

17. Song, Q. Parametric study of dynamic response of sandwich plate under moving loads / Q. Song, Z. Liu, J. Shi [et al.] // Thin-Walled Structures. — 2018. — Vol. 123. — P. 82–99.

18. Qu, Y. Time-domain structural-acoustic analysis of composite plates subjected to moving dynamic loads / Y. Qu, W. Zhang, Z. Peng [et al.] // Composite Structures. — 2019. — Vol. 208. — P. 574–584.

19. Foyouzat, M. A. An analytical-numerical solution to assess the dynamic response of viscoelastic plates to a moving mass / M.A. Foyouzat, H.E. Estekanchi, M. Mofid // Applied Mathematical Modelling. — 2018. — Vol. 54. — P. 670–696.

20. Галабурдин, А. В. Применение метода граничных интегральных уравнений к решению связных задач термоупругости с подвижной нагрузкой / А. В. Галабурдин // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2012. — № 4. — С. 29–31.

21. Галабурдин, А. В. Применение метода граничных интегральных уравнений к решению задач о движущейся нагрузке / А. В. Галабурдин // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2015. — № 1. — С. 9–11.

22. Галабурдин, А. В. Задача о бесконечной пластине, нагруженной нормальной силой, движущейся по сложной траектории / А. В. Галабурдин // Вестник Донского государственного технического университета. — 2019. — Т. 19, № 3. — С. 208–213.

23. Рекач, В. Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости / В. Г. Рекач, — Москва : Высшая школа, 1973. — 384 с.

24. Завьялов, Ю. С. Методы сплайн-функции / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, А. Л. Мирошниченко. — Москва : Наука, 1980. — 352 с.

Сдана в редакцию 27.07.2020

Запланирована в номер 05.10.2020

Об авторе:

Галабурдин Александр Васильевич, доцент кафедры «Математика и информатика», ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет», (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), кандидат физико-математических наук, доцент, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0411-6724, Galaburdin@mail.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.